Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

С.П. Водяна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина III
(Диференціальні рівняння. Ряди.)
Навчальний посібник

Рівне – 2018

УДК 517.91:517.521(075)
В 62

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
Протокол № 4 від 22 червня 2018 р.

Рецензенти:

Бомба А.Я., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ (м. Рівне);

Кушнір О.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне);

Турбал Ю.В., доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне).

Водяна С.П.
В 62 Вища математика. Ч.ІІІ. (Диференціальні рівняння. Ряди.). Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, 2018. – 85 с.

Навчальний посібник присвячено розділам вищої математики «Диференціальні рівняння» та «Ряди».

Посібник містить теоретичні відомості з вищенаведених розділів, розв’язані приклади та текстові задачі, тематичні завдання для самостійної роботи студентів.

Посібник призначено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за спеціальністю 184 «Гірництво», та буде корисним студентам інших спеціальностей, котрі вивчають запропоновані розділи.

УДК 517.91:517.521(075)

Зміст

Вступ

Базові знання в професії для будь-якого технічного інженера формуються і спираються на фундаментальні дисципліни, до яких відноситься вища математика. Написання навчального посібника зумовлено зростаючими вимогами до освіти та самоосвіти студентів, впровадженням модульної системи навчання та оцінювання знань.

Зміст посібника відповідає навчальній робочій програмі навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 184 «Гірництво».

Навчальний посібник також буде корисним студентам інших спеціальностей у процесі самостійної роботи над темами вищої математики з розділів «Диференціальні рівняння», «Ряди».

При підготовці пропонованого навчального посібника враховано особистий досвід викладання навчальної дисципліни автором та колективом кафедри вищої математики НУВГП.

Розділ 1. Звичайні диференціальні рівняння

При розв'язанні багатьох геометричних і фізичних задач часто отримують співвідношення, яке може містити незалежну змінну x, шукану функцію $y = y(x)$ та (в обов'язковому порядку) похідні шуканої функції: $y'(x)$, $y''(x)$, ...

Якщо при цьому шукана функція залежить тільки від однієї змінної, то таке співвідношення називається *звичайним диференціальним рівнянням*.

Зауважимо, що замість похідних шуканої функції в диференціальному рівнянні можуть бути присутні відповідні диференціали шуканої функції та незалежної змінної, сама ж шукана функція та незалежна змінна можуть і не входити в диференціальне рівняння в явному вигляді.

У цьому розділі викладені деякі загальні методи розв'язання окремих видів звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядків.

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Основні поняття, означення.

Означення 1. Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення вигляду

$$F(x,\ y,\ y') = 0, \qquad (1.1)$$

де x – незалежна змінна, $y = y(x)$ – шукана функція, $y' = y'(x)$ – похідна шуканої функції.

Тут і надалі *порядком диференціального рівняння* називають найвищий порядок похідної шуканої функції , з яким вона входить до рівняння.

Наприклад, $y' = x^2 y$ – диференціальне рівняння першого порядку.

Якщо рівняння (1.1) можна розв'язати відносно похідної y', то отримаємо диференціальне рівняння у вигляді

$$y' = f(x,\ y), \tag{1.2}$$

де $f(x,\ y)$ – задана неперервна функція в деякій області D на площині.

Таке диференціальне рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням, *розв'язаним відносно похідної*. Його можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.3}$$

або через диференціали

$$dy = f(x,y)dx\,. \tag{1.4}$$

Якщо $f(x;y)$ є дробом, $f(x;y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, тоді диференціальне рівняння першого порядку можна записати в *симетричній диференціальній формі*

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0. \tag{1.5}$$

Введемо поняття розв'язку диференціального рівняння (1.2).

Означення 2. *Розв'язком* диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ називається функція $y = \varphi(x)$, яка визначена на проміжку (a, b) і задовольняє умовам:

1) $\varphi(x)$ диференційована в кожній точці (a, b);
2) $(x, \varphi(x)) \in D$ для всіх $x \in (a, b)$;
3) $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ для всіх $x \in (a, b)$.

Остання умова означає, що при підстановці в диференціальне рівняння функції $\varphi(x)$ отримуємо тотожність відносно x.

Графік функції $y=\varphi(x)$ називається *інтегральною кривою*.

Відома задача інтегрування функцій може бути розглянута як задача інтегрування диференціального рівняння

$$y'=f(x),$$

розв'язок якого

$$y=\int f(x)dx+C.$$

Інтегральні криві утворюються зсувом однієї з них вздовж осі Оy в залежно від значень константи C, яка є довільною сталою і може набувати будь-яких значень з множини дійсних чисел.

Процес знаходження розв'язків диференціальних рівнянь називають їх *інтегруванням*.

Як бачимо, диференціальне рівняння першого порядку має нескінченну множину розв'язків – сім'ю розв'язків, яка залежить від однієї довільної сталої.

Для диференціальних рівнянь мають місце поняття загального та частинного (окремого) його розв'язків.

Введемо поняття загального розв'язку та загального інтеграла диференціального рівняння в тій формі, в якій вони зустрічаються при розв'язуванні задач та вправ.

Означення 3. Функція $y=y(x,C)$, що містить довільну сталу C, називається *загальним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку, якщо ця функція є його розв'язком при довільному значенні сталої C і якщо будь-який його частинний розв'язок можна отримати із загального розв'язку при певному конкретному значенні константи C.

Розв'язок $y=y(x,C_0)$ при фіксованому значенні сталої C називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння першого порядку.

Ті розв'язки диференціального рівняння, які не можна отримати із загального розв'язку ні при яких значеннях довільної сталої *C*, мають назву *особливих розв'язків* (термін ввів французький математик і механік Ж.Лагранж).

Загальний розв'язок диференціального рівняння може бути отриманий в неявному вигляді і тоді його називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Так, наприклад, загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку має вигляд співвідношення вигляду $\Phi(x,y,C)=0$ (або співвідношення $\Psi(x,y)=C$).

Аналогічно, частинний розв'язок також може бути отриманий в неявному вигляді. В цьому випадку його називають *частинним інтегралом* диференціального рівняння. Наприклад, частинний інтеграл диференціального рівняння першого порядку – це співвідношення вигляду $\Phi(x,y,C_0)=0$, де C_0 певне конкретне значення довільної сталої *C*.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку (1.2). З геометричної точки зору, розв'язати це рівняння означає знайти криву $y=\varphi(x)$, яка має в кожній точці M(x;y) дотичну з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює значенню функції $f(x,\ y)$ в цій точці. При цьому точка M(x;y) повинна належати області визначення функції $f(x,\ y)$. Виникає питання: чи через будь-яку точку $M_0(x_0;\ y_0)$ з області визначення функції $f(x,\ y)$ обов'язково проходить інтегральна крива диференціального рівняння (1.2) чи ні і якщо проходить, то чи вона єдина? Іншими словами, ставиться питання про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку (1.2). Відповідь на поставлене питання дає теорема.

Теорема 1. Якщо в рівнянні $y'=f(x,\ y)$ функція $f(x,\ y)$ та її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в деякій області D на площині Oxy, що містить точку $M_0(x_0;\ y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \tag{1.6}$$

Вперше поставив і довів цю теорему за таких умов французький математик О.Коші (1789 – 1857) у 20-х роках 19 століття. Тому, задачу про знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння (1.2), який задовольняє умові (1.6), називають задачею Коші.

Задача Коші: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (1.2), який задовольняє умову (1.6)

Умову (1.6) називають *початковою умовою*, а числа x_0, y_0 називають *початковими значеннями*. Останні назви склалися історично при дослідженні диференціальних рівнянь, які описують рух якогось тіла. В таких задачах природньо задають початкові умови руху: початок відліку (час), початкове положення тіла і т.д.

Геометрично задача Коші полягає в знаходженні інтегральної кривої диференціального рівняння (1.2) , яка проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Зауважимо, що згадані вище *особливі* розв'язки диференціального рівняння мають таку особливість, що в кожній їхній точці порушується *єдиність* розв'язку. Для диференціального рівняння (1.2) це означає, що через кожну точку особливого розв'язку проходить кілька різних інтегральних кривих, які мають в цих точках спільну дотичну.

Відзначимо, що спільного методу інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку (як і інших) не існує. Розглянемо окремі види диференціальних рівнянь першого порядку, для кожного з яких існує свій метод розв'язання.

1.2. Диференціальне рівняння з відокремленими змінними та із змінними, що відокремлюються.

Означення 4. Диференціальне рівняння вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0\ , \qquad (1.7)$$

де $M(x)$, $N(y)$ – неперервні функції своїх змінних, називається диференціальним рівнянням з *відокремленими змінними*.

Звернемо увагу, що в рівнянні при диференціалах присутні функції, залежні від одноіменних з диференціалами змінних. Тобто, при диференціалі dx присутня функція, залежна тільки від x, а при диференціалі dy присутня функція, залежна тільки від y.

Загальний розв'язок диференціального рівняння можна подати у формі загального інтеграла диференціального рівняння:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C\ , \qquad (1.8)$$

де *C-довільна стала.*

Розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0,\ y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0. \qquad (1.9)$$

Отже, розв'язання диференціального рівняння з відокремленими змінними зводиться до знаходження інтегралів. Цей вид рівнянь відносять до найпростіших диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xdx - ydy = 0$.

Дане диференціальне рівняння має вигляд (1.7) і є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремленими змінними.

Отримуємо $\int x\,dx - \int y\,dy = C_1$, звідки після інтегрування

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C_1$$

або, позначивши $2C_1 = C$, маємо загальний інтеграл диференціального рівняння у вигляді

$$x^2 - y^2 = C.$$

Загальний інтеграл при $C \neq 0$ описує сім'ю рівнобічних гіпербол, а при $C = 0$ задає пару прямих $y = x$ та $y = -x$.

Означення 5. Диференціальним рівнянням із *змінними, що відокремлюються,* називають диференціальне рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1.10)$$

або, розв'язане відносно похідної, рівняння

$$y' = f_1(x)f_2(y). \qquad (1.11)$$

Ці рівняння зводяться до диференціальних рівнянь із відокремленими змінними.

Для цього потрібно відокремити змінні, тобто, за допомогою алгебраїчних перетворень, записати рівняння так, щоб диференціали були в чисельниках і при диференціалі dx були присутні функції, залежні тільки від x, а при диференціалі dy –функції, залежні тільки від y.

Для відокремлення змінних використовуємо диференціальну форму запису рівняння (1.10).

Ділимо рівняння (1.10) на $(N_1(y)\,M_2(x))$ при $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$. Дістанемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (1.12)$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Після інтегрування даного рівняння потрібно врахувати розв'язки рівнянь $N_1(y) = 0$, $M_2(x) = 0$, які, очевидно, будуть розв'язками диференціального рівняння (1.10). Далі потрібно проаналізувати питання, чи є ці розв'язки особливими розв'язками диференціального рівняння (1.10).

Аналогічно відокремлюємо змінні в рівнянні (1.11), подаючи його у вигляді:

$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$, звідки отримуємо при $f_2(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Інтегруємо ліву і праву частини, отримуємо $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$, де $C \in R$.

Перевіряємо, чи не були втрачені розв'язки початкового рівняння в процесі відокремлення змінних. Для цього розв'язуємо рівняння $f_2(y) = 0$ і отримані розв'язки аналізуємо.

Приклад 2.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = 2xy^2$.

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння відноситься до диференціальних рівнянь із змінними, що відокремлюються вигляду (1.11) (розв'язане відносно похідної).

Запишемо диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2,$$

$$dy = 2xy^2 dx,$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2xdx, \text{ де } y \neq 0 .$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx \text{ і отримуємо}$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}, C \in R.$$

Отримали загальний розв’язок даного рівняння.

Зауважимо, що частинний розв’язок $y = 0$ входить в загальний розв’язок при $C = \infty$ і тому не буде особливим розв’язком даного диференціального рівняння.

Приклад 3.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$x\sqrt{4 - y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0. \quad (1.13)$$

Як бачимо, це диференціальне рівняння першого порядку із змінними, що відокремлюються вигляду (1.10).

Відокремлюємо змінні. Для цього поділимо рівняння на добуток ($\sqrt{4 - y^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}$), вважаючи $\sqrt{4 - y^2} \neq 0$ (інший множник завжди відмінний від нуля). Отримаємо

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{4 - y^2}}dy = 0 .$$

Змінні відокремлені, можна інтегрувати.

Інтегруємо ліву і праву частини, отримуємо

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{4 - y^2}}dy = C, \quad C \in R .$$

З точністю до вигляду довільної сталої, остаточно отримуємо $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{4-y^2}=C$ – загальний інтеграл рівняння (1.13).

Шукаємо можливі особливі розв'язки, розв'язуючи рівняння

$$\sqrt{4-y^2}=0,$$

$$4-y^2=0,$$

$$y=\pm 2.$$

Функції $y=\pm 2$ задовольняють рівняння (1.13), однак їх не можна отримати із загального розв'язку ні при яких значеннях константи C. Отже, $y=\pm 2$ – особливі розв'язки рівняння (1.13).

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння $(1+\cos x)\,y'=y\sin x$, який задовольняє початкову умову $y(0)=2$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння із змінними, що відокремлюються. Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x}{1+\cos x}.$$

Відокремлюємо змінні і, проінтегрувавши, отримаємо:

$$\frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{1+\cos x}dx; \quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+C,$$

$$\ln|y|=-\ln|1+\cos x|+\ln|C|,$$

звідки маємо загальний розв'язок рівняння

$$y=\frac{C}{1+\cos x}.$$

Зауважимо, що для зручності запису загального розв'язку довільну сталу інтегрування подано через логарифм.

При $C=0$ отримаємо розв'язок $y=0$, втрачений при відокремлюванні змінних.

Знаходимо частинний розв'язок рівняння. Використовуючи початкову умову $y(0)=2$, маємо

$$2=\frac{C}{1+\cos 0},$$

звідки знаходимо значення константи $C=4$, яке виділяє із загального розв'язку частинний розв'язок.

Отже, $y^*=\dfrac{4}{1+\cos x}$ – шуканий частинний розв'язок диференціального рівняння.

1.2.1. Текстові задачі.

Розглянемо задачі з фізичним змістом, розв'язання яких приводить до диференціальних рівнянь першого порядку із змінними, що відокремлюються.

Задача 1. Деяке фізичне тіло, температура якого в початковий момент $t=0$ рівна T_0 внесли в середовище, температура якого підтримується на одному рівні T_1 і є незмінною. Як буде змінюватися в часі температура даного тіла?

Розв'язання.

У запропонованій задачі потрібно встановити закон зміни температури тіла як функції часу *t*.

Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t. Експериментально встановлено, що при певних спрощеннях швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища. Згідно механічного змісту першої похідної, швидкість зміни температури $T(t)$ в момент часу *t* рівна значенню похідної в цей момент часу. Позначимо γ – коефіцієнт пропорційності. Згідно умови задачі отримуємо рівняння

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma(T(t) - T_1). \qquad (1.14)$$

Знак «мінус» в правій частині рівняння відповідає дослідним даним: якщо $(T(t) - T_1) > 0$, то температура тіла спадає, і тому швидкість її зміни від'ємна, якщо ж $(T(t) - T_1) < 0$, то температура тіла зростає, отже,швидкість її зміни додатна.

Рівняння (1.14) є диференціальним рівнянням першого порядку із змінними, що відокремлюються. Це рівняння з певною точністю моделює процес нагрівання чи охолодження тіла в середовищі з постійною температурою. Один із розв'язків: $T(t) = T_1$ (температура тіла та середовища однакові). Загальний розв'язок (1.14) отримаємо у вигляді:

$$T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}.$$

Враховуючи умову $T(0) = T_0$, отримуємо кінцевий результат – шукану залежність температури тіла від часу

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}. \qquad (1.15)$$

Функція $T(t)$ зростає при $(T(t) - T_1) < 0$ (тіло нагрівається) і спадає при $(T(t) - T_1) > 0$ (тіло охолоджується). В обох випадках із зростанням t температура тіла прямує до T_1.

Задача 2. Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду пропорційна кількості речовини. Знайти півперіод розпаду радіоактивної речовини (т.б. час, впродовж якого розпадеться половина речовини).

Розв'язання.

Позначимо $x(t)$ – кількість радіоактивної речовини в момент часу t, $x(0) = x_0$ – початкова кількість речовини. Швидкість радіоактивного розпаду рівна $\frac{dx}{dt}$. З умови задачі отримуємо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -kx,\ k>0,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Це вже знайоме диференціальне рівняння першого порядку із змінними, що відокремлюються. Відокремлюємо змінні, інтегруємо:

$$\frac{dx}{x} = -kdt,$$

$$\ln x = -kt + \ln C,$$

отримуємо $x = Ce^{-kt}$ – загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкову умову $x(0) = x_0$, знаходимо значення сталої C: $C = x_0$. Шуканий частинний розв'язок має вигляд: $x(t) = x_0 e^{-kt}$.

Час t, через який розпадеться половина речовини, визначаємо з рівняння

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kt},$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{2}, \quad -kt = \ln\frac{1}{2}, \quad t = \frac{\ln 2}{k}.$$

Як бачимо, цей час не залежить від кількості початкової речовини.

1.2.2. Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння.

1. $xydx + (x+1)dy = 0$;
2. $y'ctgx + y = 2$;
3. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$;
4. $y'x = -y$;
5. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$;
11. $y' = -2xe^{x^2}\sqrt{1+y^2}$;
12. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$;
13. $y' = y$;
14. $y' = xy(y+2)$;
15. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$;

6. $xy' + y = y^2$;

7. $2x^2yy' + y^2 = 2$;

8. $y' = 10^{x+y}$;

9. $y' = x$;

10. $(1 + x^2)y' = y$;

16. $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$;

17. $y' - xy^2 = 2xy$;

18. $y' = \dfrac{y-2}{x+5}$;

19. $y'x^2 = -y$;

20. $(4 - x)y' = 1 + 2y$.

1.3.Однорідні диференціальні рівняння.

Введемо поняття однорідної функції певного виміру (або степеня) за двома змінними.

Означення 6. Функція *f(x,y)* називається *однорідною функцією k-го виміру* щодо змінних *x* та *y*, якщо для будь-якого *t* має місце тотожність

$$f(tx, ty) \equiv t^k f(x, y),$$

де *k* – деяке дійсне число.

При *k*=0 маємо *однорідну функцію нульового виміру*, котра задовільняє співвідношенню

$$f(tx, ty) \equiv f(x, y)$$

для будь-якого значення *t*.

Прикладами однорідних функцій *k*-го виміру є однорідні многочлени $P_k(x, y)$ відповідно *k*-го степеня за двома змінними, які складаються виключно з доданків виду $C_{ij}x^i y^j$, де *i*+*j*=*k*, $C_{ij} \in R$. Наприклад,

$P_1(x, y) = C_{10}x + C_{01}y,-$ однорідний многочлен I степеня;

$P_2(x, y) = C_{20}x^2 + C_{11}xy + C_{02}y^2,-$ однорідний многочлен II степеня і т.д.

Нескладно перевірити, що відношення (частка) двох однорідних функцій однакового виміру складе однорідну функцію нульового виміру. Наприклад,

$f(x,y)=\dfrac{3x-y}{x+2y}$, – однорідна функція нульового виміру як відношення однорідних многочленів першого степеня в чисельнику та знаменнику.

Означення 7. *Однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1.14)$$

або

$$y'=f(x,y), \qquad (1.15)$$

де $M(x,y), N(x,y)$ – однорідні функції одного і того ж виміру, а $f(x,y)$ однорідна функція нульового виміру.

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку можна подати у вигляді

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (1.16)$$

За допомогою заміни змінної $\dfrac{y}{x}=u$, де $u=u(x)$ - нова шукана функція, це диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння із змінними, що відокремлюються.

Отже, робимо в однорідному диференціальному рівнянні (1.16) заміну

$$y=ux, \qquad (1.17)$$

де $u=u(x)$ – нова шукана функція.

Знаходимо $y'=(ux)'=u'x+u$ і підставляємо в рівняння. Отримуємо

$$u'x+u=f(u).$$

Далі відокремлюємо змінні:

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u,$$

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'=\frac{y^2}{x^2}$.

Функція $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру. Дійсно,

$$f(tx,ty)=\frac{(ty)^2}{(tx)^2}=\frac{t^2y^2}{t^2x^2}=\frac{y^2}{x^2}=f(x,y).$$

Отже, це рівняння – однорідне диференціальне рівняння першого порядку.

Робимо заміну $y=ux$, знаходимо $y'=(ux)'=u'x+u$ і підставляємо в рівняння, отримуємо

$$u'x+u=u^2,$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2-u,$$

$$\frac{du}{u^2-u}=\frac{dx}{x},$$

- це диференціальне рівняння з відокремленими змінними відносно нової шуканої функції $u=u(x)$.

Інтегруючи, знаходимо його загальний розв’язок: $\int\frac{du}{u^2-u}=\int\frac{dx}{x}$,

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|x| + \ln|C|, \; C \in R,$$

$$\left|\frac{u-1}{u}\right| = |Cx|,$$

$$u = \frac{1}{1-Cx}.$$

Повертаємось до заміни, отримуємо

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1-Cx},$$

звідки остаточно знаходимо

$y = \dfrac{x}{1-Cx}$, – загальний розв'язок даного однорідного рівняння, $C \in R$.

Приклад 6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = \dfrac{2x+y}{x}$, який задовольняє умову $y(1) = 2$.

Розв'язання. Права частина диференціального рівняння $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x}$ є відношенням однорідних многочленів першого степеня, отже це однорідна функція нульового виміру. Згідно *означення* 7, дане диференціальне рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку.

Робимо заміну $y = ux$, знаходимо $y' = (ux)' = u'x + u$ і підставляємо в рівняння. Отримаємо

$$u'x + u = \frac{2x+ux}{x}, \text{ звідки } u' = \frac{2}{x}.$$

Інтегруючи, маємо: $u = 2\ln|x| + C$. Повертаємось до заміни і знаходимо $y = x(2\ln|x| + C)$ – загальний розв'язок даного однорідного рівняння.

Використовуємо початкову умову, отримаємо рівняння

$$2 = 2\ln|1| + C .$$

Знаходимо значення $C = 2$, підставляємо його в загальний розв'язок однорідного рівняння і отримуємо шуканий частинний розв'язок y^*:

$$y^* = x(2\ln|x| + 2) .$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$xdy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx = 0 . \qquad (1.18)$$

Перевіримо, чи є однорідними функції $M(x, y) = -(y + \sqrt{x^2 + y^2})$ та $N(x, y) = x$. Маємо:

$$M(tx, ty) = -(ty + \sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2}) = -t(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = tM(x, y).$$

$$N(tx, ty) = tx = tN(x, y) .$$

Отже, функції $M(x, y) = -(y + \sqrt{x^2 + y^2})$, $N(x, y) = x$ є однорідними функціями першого виміру відносно змінних x та y. Тому, рівняння (3) є однорідним.

Введемо заміну:

$$y = u \cdot x .$$

Знаходимо:

$$dy = udx + xdu ,$$

$$x(udx + xdu) - (ux + \sqrt{x^2 + u^2 x^2})dx = 0 ,$$

$$x(udx + xdu) - x(u + \sqrt{1 + u^2})dx = 0 ,$$

$$(udx + xdu) - (u + \sqrt{1 + u^2})dx = 0, x \neq 0 ,$$

$$xdu - \sqrt{1 + u^2}\,dx = 0.$$

Відокремлюємо змінні, інтегруємо:

$$xdu = \sqrt{1 + u^2}\,dx ,$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}, \sqrt{1 + u^2} \neq 0,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = \ln|Cx|,$$

$$Cx = u+\sqrt{1+u^2},\ C>0,$$

$$Cx = \frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

Звідки знаходимо загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння (1.18):

$$Cx^2 = y+\sqrt{x^2+y^2},\ C>0.$$

Частинним розв'язком є функція $x=0$.

1.3.1. Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння.

1. $y' = \dfrac{y+\sqrt{xy}}{x}$;
2. $y' = \dfrac{y}{x}+tg\,\dfrac{y}{x}$;
3. $y' = \dfrac{3x+y}{x}$;
4. $y' = \dfrac{xy-y^2}{x^2}$;
5. $y' = \dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$;
6. $y' = \dfrac{x-2y}{x}$;

11. $(2\sqrt{xy}-y)dx-xdy=0$;
12. $x^2y'-y^2+xy-x^2=0$;
13. $y' = \dfrac{y-\sqrt{xy}}{x}$;
14. $y' = 1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$;
15. $x^2+y^2-2xyy'=0$;
16. $(2x-y)dx-xdy=0$;

7. $(x+2y)dx - xdy = 0$;

8. $x^2y' = y^2 + xy$;

9. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;

10. $(x+2y)dx - (2x-3y)dy = 0$;

17. $x \;\; + y \;\; - 2yy' = 0$;

18. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

19. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$;

20. $x - 3y - 5yy' = 0$.

1.4. Лінійні диференціальні рівняння.

Означення 8. *Лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називають диференціальне рівняння, в якому шукана функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ входять тільки в перших степенях (лінійно) і відсутній їх добуток. Отже, це диференціальне рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1.14}$$

де $P(x), Q(x) -$ задані неперервні функції.

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то диференціальне рівняння є лінійним *однорідним* диференціальним рівнянням. При $Q(x) \neq 0$ диференціальне рівняння називається лінійним *неоднорідним*.

Лінійні однорідні рівняння інтегруються так, як і диференціальні рівняння зі змінними, що відокремлюються:

$$y' + P(x)y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -P(x)y,$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \qquad \int \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx; \quad y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C \in R.$$

Одним із методів розв’язання лінійних неоднорідних рівнянь є метод Бернуллі, за яким процес розв’язання лінійного диференціального рівняння зводиться до розв’язання двох простіших рівнянь – диференціальних рівнянь першого порядку із змінними, що відокремлюються.

Метод Бернуллі. Розв'язок диференціального рівняння (1.14) шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v$, де *u=u(x)*, *v=v(x)* – нові шукані функції. Знаходимо $y' = u'v + uv'$ і підставляємо в рівняння. Отримуємо :

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Оскільки в одному рівнянні дві шукані функції, то на одну з них можна покласти певну умову. Для спрощення вимагають, щоб, наприклад, функція *v=v(x)* перетворювала в нуль вираз в дужках останнього рівняння.

Отже, рівняння зводиться до системи двох диференціальних рівнянь із змінними, що відокремлюються:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Тут $v(x)$ – будь-який частинний розв'язок верхнього рівняння системи.

Знаходимо змінну v:

$$v' = -P(x)v, \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Із другого рівняння системи знаходимо змінну u:

$$u' = Q(x)v^{-1}, \quad u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}; \; u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C, C \in R.$$

Остаточно маємо розв'язок у вигляді

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right) e^{-\int P(x)dx}, \; C \in R. \qquad (1.15)$$

Зауваження. До лінійного диференціального рівняння зводиться також диференціальне рівняння Бернуллі вигляду:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, \; n \neq 1).$$

У цьому рівнянні вводять нову змінну $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, і відносно шуканої функції $z=z(x)$ воно набирає вигляду:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x),$$

отже стає лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy' + y = x^2.$$

Розв'язання.

Як бачимо, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Знаходимо $y' = u'v + uv'$ і підставляємо в рівняння. Отримуємо

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зводимо це рівняння до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} xv' + v = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо:

$$v' = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}$ - частинний розв'язок.

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2,\ u' = x^2, x \neq 0;\ u = \int x^2 dx;\ u = \frac{x^3}{3} + C\ , C \in R.$$

Знаходимо загальний розв'язок лінійного рівняння:

$$y = uv,$$

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right) x^{-1},\ C \in R.$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' - y\,ctg\,x = \sin^2 x\,.$$

Розв'язання. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Робимо заміну $y = uv$. Знаходимо $y' = u'v + uv'$, підставляємо в рівняння і отримуємо:

$$u'v + uv' - uvctg\,x = \sin^2 x\,.$$

Можна згрупувати доданки наступним чином:

$$uv' + v(u' - uctg\,x) = \sin^2 x\,.$$

Оскільки на одну із функцій u або v можна покласти певну умову, то за u виберемо будь-який, відмінний від нуля, розв'язок рівняння $u' - u\,ctg\,x = 0$. Отримуємо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} u' - uctgx = 0, \\ uv' = \sin^2 x\ . \end{cases}$$

Розв'язуємо верхнє рівняння системи. Маємо:

$$\frac{du}{dx} = u\,ctg\,x\,,\ \frac{du}{u} = ctg\,x\,dx\,,\ \int \frac{du}{u} = \int ctg\,x\,dx\,,$$

$\ln|u| = \ln|\sin x|$, $u = \pm \sin x$. Виберемо $u = \sin x$.

Функцію v знайдемо з рівняння $uv' = \sin^2 x$ при знайденій функції $u = \sin x$. Розв'язуємо рівняння:

$$v' \sin x = \sin^2 x\,;\ v' = \sin x,\ (\sin x \neq 0)\,;$$

$$v = \int \sin x\,dx + C = -\cos x + C,\ C \in R.$$

Повертаємось до заміни $y = uv$ і знаходимо $y = \sin x(C - \cos x)$, $C \in R$ - шуканий загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 10. Знайти розв'язок рівняння $y' - \frac{2y}{x} = x^4$, який задовольняє початкову умову $y(1) = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок цього диференціального рівняння. Оскільки рівняння лінійне, то підставивши в це рівняння $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, після перетворення маємо: $uv' + v\left(u' - \frac{2u}{x}\right) = x^4$. Знаходимо функції u і v із системи рівнянь: $\begin{cases} u' - \frac{2u}{x} = 0, \\ uv' = x^4. \end{cases}$

$$u' - \frac{2u}{x} = 0, \frac{du}{u} - \frac{2dx}{x} = 0,$$

$$\ln|u| = 2\ln|x|,\ u = x^2.$$

$$uv' = x^4;\ x^2 v' = x^4;\ v' = x^2,\ x \neq 0;$$

$$v = \frac{x^3}{3} + C, C \in R.$$

Отримуємо загальний розв'язок даного рівняння: $y = x^2\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$, $C \in R$.

Використовуємо початкову умову. Маємо рівняння

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C.$$

Звідки знаходимо $C = 1$. Підставляємо це значення в загальний розв'язок і отримуємо шуканий частинний розв'язок y^* цього рівняння, який задовольняє дану початкову умову: $y^* = x^2\left(\dfrac{x^3}{3}+1\right)$.

1.4.1. Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння.

1. $y' = 3x^2e^{-x^2} - 2xy$;
2. $y' - \dfrac{y}{x} = \sin x$;
3. $(2x+1)y' = 4x + 2y$;
4. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$;
5. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;
6. $y' - 2xy = e^{x^2}$;
7. $y' - y = 3x^2e^x$;
8. $y' - y = 4x^3e^x$;
9. $xy' - 2y = x^3\cos x$;
10. $xy' - 2y = 2x^4$;
11. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = x^2$;
12. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;
13. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$;
14. $y' - ytgx = \cos x$;
15. $y' - 2xy = 3x^2e^{x^2}$;
16. $y' + y = 3x^2e^{-x}$;
17. $y' - y = 2xe^x$;
18. $y' + y = 2xe^{-x}$;
19. $y' + y = e^{-x}$;
20. $(2x+1)y' = 4x + 2y$

Тема 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

1.5. Основні поняття, означення.

Введемо деякі загальні поняття про диференціальні рівняння вищих порядків.

Означення 9. Звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку називається співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1.16)$$

яке обов'язково містить $y^{(n)}$. Функція F визначена і неперервна в деякій області $G \subseteq R^{n+2}, n \geq 1$. Тут x –

незалежна змінна, $y = y(x)$ – шукана функція, $y^{(n)}$ – похідна n-го порядку від шуканої функції.

Наприклад, $3y'' + \cos y = 0$ – диференціальне рівняння другого порядку; $y''' - y'' = 0$ – диференціальне рівняння третього порядку і т.д.

Диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$ має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \qquad (1.17)$$

де функція f є неперервною в деякій області $D \subseteq R^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (1.17) на інтервалі (a, b) називають функцію $y = y(x)$, яка задовольняє умовам:

1) функція $y = y(x)$ n разів неперервно диференційована на (a, b);

2) $\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \in D$, для всіх $x \in (a, b)$;

3) функція $y = y(x)$ перетворює рівняння (1.17) в тотожність на (a, b).

Загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку залежить від n довільних сталих і має вигляд

$$y = y(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n),$$
$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n \in R.$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння n-го порядку є співвідношенням вигляду:

$$\Phi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0,$$
$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n \in R.$$

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає у знаходженні частинного розв'язку $y=y(x)$, що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

де y_k , k =0,1,2,…, n-1, - заздалегідь задані значення.

Деякі диференціальні рівняння можуть бути зінтегровані в квадратурах, тобто знаходження загального розв'язку зводиться до інтегрування відомих функцій.

Розглянемо далі диференціальні рівняння другого порядку, для яких існують методи їх розв'язання.

1.6. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку.

У загальному випадку диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1.18)$$

Загальний розв'язок такого рівняння містить дві довільні сталі:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \qquad (1.19)$$

$$C_1, C_2 \in R.$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння другого порядку має вигляд співвідношення

$$\Phi(x, C_1, C_2) = 0, \qquad (1.20)$$

$$C_1, C_2 \in R.$$

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку (1.18) полягає в пошуку частинного розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1,$$

де y_0, y_1 - задані числа.

У деяких випадках можна знизити порядок диференціального рівняння (1.18), провівши заміну, тобто звести його до диференціального рівняння першого порядку.

Отже, розглянемо три випадки, в яких диференціальні рівняння другого порядку допускають пониження порядку.

Усе залежить від вигляду та складових диференціального рівняння.

І. Рівняння вигляду

$$y'' = f(x). \qquad (1.21)$$

Заміна $y' = z$, де $z = z(x)$. Знаходимо $y'' = z'$ і рівняння набуває вигляду

$$z' = f(x).$$

Це рівняння першого порядку відносно нової шуканої функції $z(x)$. Інтегруванням знаходимо $z = z(x, C_1)$, далі повертаємось до заміни та інтегруємо ще раз і знаходимо загальний розв'язок початкового рівняння (1.21):

$$z = \int f(x)dx + C_1, \quad y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2; \quad C_1, C_2 \in R.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1.21) знаходиться послідовним інтегруванням функції $f(x)$ два рази.

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = 12x + 4\cos 2x.$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку вигляду (1.21). Інтегруємо два рази, отримаємо:

$$y' = \int \left(12x + 4\cos 2x\right)dx + C_1 = 6x^2 + 2\sin 2x + C_1,$$

$$y = \int \left(6x^2 + 2\sin 2x + C_1\right)dx + C_2 = 2x^3 - \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$C_1, C_2 \in R.$$

Шуканий загальний розв'язок даного рівняння має вигляд: $y = 2x^3 - \cos 2x + C_1 x + C_2$; $C_1, C_2 \in R$.

Приклад 12. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$, який задовольняє початковим умовам: $y(1) = 4$, $y'(1) = 2$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння другого порядку вигляду (1.21).

Знаходимо спочатку загальний розв'язок рівняння шляхом інтегрування:

$$y' = -\int \frac{dx}{x^2} + C_1 = \frac{1}{x} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx + C_2 = \ln|x| + C_1 x + C_2 ; C_1, C_2 \in R.$$

Отримали $y = \ln|x| + C_1 x + C_2$ – шуканий загальний розв'язок.

Підставляємо у вирази для y та y' початкові умови: $x = 1$, $y = 4$, $y' = 2$ і отримуємо систему двох рівнянь для знаходження сталих C_1, C_2, які виділять із сім'ї загального розв'язку відповідний частинний розв'язок, що задовольняє даним початковим умовам. Отримуємо систему

$$\begin{cases} 4 = \ln 1 + C_1 + C_2, \\ 2 = 1 + C_1. \end{cases}$$

Знаходимо: $C_1 = 1$, $C_2 = 3$. Підставляємо ці значення в загальний розв'язок і отримуємо: $y^* = \ln|x| + x + 3$, - шуканий частинний розв'язок.

II. У диференціальному рівнянні (1.18) відсутня шукана функція в явному вигляді, т.б. рівняння має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0 . \qquad (1.22)$$

Робимо заміну

$$y' = z(x) , \qquad (1.23)$$

Знаходимо $y'' = z'(x)$, підставляємо в (1.22) і дістаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно $z(x)$:

$$F(x,\ z,\ z') = 0. \qquad (1.24)$$

Якщо буде знайдено загальний розв'язок цього рівняння $z = z(x,\ C_1)$, то, повертаючись до заміни (1.23), дістанемо $y = \int z(x,\ C_1)dx + C_2$, - загальний розв'язок рівняння (1.22).

Приклад 13. Розв’язати рівняння $y''=\dfrac{y'}{1+x}$.

Це диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно *y*.

Робимо заміну $y'=z(x),\ y''=z'$ і отримуємо диференціальне рівняння першого порядку із змінними, що відокремлюються відносно функції $z(x)$:

$$z'=\frac{z}{1+x}, \qquad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{1+x} \ ,$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{1+x}\ , \ln|z|=\ln|1+x|+\ln C_1,$$

$$z=C_1(1+x), \quad y'=C_1(1+x), \quad y=\int C_1(1+x)dx.$$

Інтегруємо і знаходимо загальний розв’язок диференціального рівняння другого порядку:

$$y=C_1\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+C_2; \quad C_1,C_2\in R.$$

III. Диференціальне рівняння (1.18) не містить явно аргументу *x*.

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(y,y',y'')=0\ . \tag{1.25}$$

Порядок рівняння можна знизити, якщо за нову незалежну змінну візьмемо *y,* а за нову залежну змінну $z=y'$.

Отже, робимо заміну: $y'=z(y)$.

Дістаємо рівність: $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=z\dfrac{dz}{dy}$.

Остаточно приходимо до диференціального рівняння першого порядку $F\left(y,z,z\dfrac{dz}{dy}\right)=0$.

Якщо знайдемо загальний розв'язок цього рівняння, то для пошуку загального розв'язку диференціального рівняння (1.25) дістанемо рівняння:

$$y' = z(y, C_1), \ \frac{dy}{dx} = z(y, C_1), \ \int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2; \ C_1, C_2 \in R.$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = \frac{(y')^2}{y+1}$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежної змінної x. Робимо заміну $y' = z(x)$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$, отримаємо:

$$z\frac{dz}{dy} = \frac{z^2}{y+1} \text{ або } \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y+1}.$$

Після інтегрування маємо: $z = C_1(y+1)$. Оскільки $z = y'$, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно початкової шуканої функції:

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y+1).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо шуканий загальний розв'язок даного рівняння:

$$\frac{dy}{y+1} = C_1\,dx, \ \int \frac{dy}{y+1} = C_1 \int dx + C,$$

$$\ln|y+1| = C_1 x + C,$$

$$|y+1| = e^{C_1 x + C},$$

$$y + 1 = \pm e^C e^{C_1 x},$$

$$y = C_2\, e^{C_1 x} - 1;$$

$$C_1, C_2 \in R.$$

Отже, $y = C_2 e^{C_1 x} - 1$, де $C_1, C_2 \in R$ – загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

1.6.1. Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y'' = 36x^2 + 12x$;
2. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
3. $y'' x \ln x = y'$;
4. $y'' \mathrm{tg} x = y' + 1$;
5. $yy'' = y'^2$;
6. $yy'' = -(y')^3$;
7. $(1 + x^2) y'' - (1 + (y')^2)$;
8. $y'' = \dfrac{1}{x}$;
9. $y'' = 1 - y'^2$;
10. $xy'' = y'$;
11. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$;
12. $y'' + 2y(y')^3 = 0$;
13. $y'' + 2xy'^2 = 0$;
14. $y'' = 1 + y'^2$;
15. $(y'')^2 = 4y'$;
16. $2yy'' = -(y')^2 - (y')^4$;
17. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;
18. $y'' = -\dfrac{x}{y'}$;
19. $xy'' + y' = 0$;
20. $(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0$.

Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

1.7. Основні поняття, означення.

Диференціальне рівняння називають лінійним, якщо в ньому шукана функція та всі її похідні входять тільки в перших степенях і при цьому відсутні добутки будь-яких з цих функцій.

Означення 10. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x) \,, \qquad (1.26)$$

де $y = y(x)$ - шукана функція, $f(x)$ - задана неперервна функція; p, q - задані числа,сталі коефіцієнти рівняння. При $f(x) \equiv 0$ диференціальне рівняння (1.26) називається *однорідним*, а при $f(x) \neq 0$ - *неоднорідним.*

Однорідне рівняння, яке відповідає (1.26)**,** має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0 \,. \qquad (1.27)$$

Введемо поняття лінійної комбінації та лінійної незалежності системи функцій. Це поняття має місце для будь-якої скінченної кількості функцій, зокрема для системи двох функцій.

Означення 11. *Лінійною комбінацією* функцій $y_1(x), y_2(x)$ називають вираз вигляду $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1, C_2 - довільні сталі.

Означення 12. Функції $y_1(x), y_2(x)$ називають *лінійно незалежними*, якщо з рівності

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0 \,, \; C_1, C_2 \in R,$$

випливає, що $C_1 = C_2 = 0.$ В протилежному випадку – функції $y_1(x), y_2(x)$ *лінійно залежні.*

Отже, лінійна комбінація лінійно незалежних функцій рівна нулю тільки при нульових значеннях констант C_1, C_2. Для двох функцій зручно перевіряти лінійну незалежність, виходячи з наступного означення.

Означення 13. Функції $y_1(x), y_2(x)$ називають *лінійно незалежними*, якщо $y_1(x)/\, y_2(x) \neq \text{const}$. Інакше, при $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}$, функції *лінійно залежні.*

Для системи двох і більшого числа функцій їх лінійну незалежність встановлюють за *визначником Вронського.*

Означення 14. *Визначником Вронського* для функцій $y_1(x), y_2(x)$, які мають похідні першого порядку, називають функціональний визначник вигляду

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2{}'(x)-y_2(x)y_1{}'(x) \qquad (1.28)$$

Мають місце теореми.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ лінійно залежні, то їх визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.

Теорема 3. (обернена). Якщо визначник Вронського (1.28) рівний нулю, то функції $y_1(x), y_2(x)$ - лінійно залежні.

Дійсно, нехай $W(x)=0$. Це означає, що

$$y_1y_2' - y_2y_1' = 0 .$$

Далі отримуємо логічний «ланцюжок»:

$$\frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2{}^2} = 0, \Rightarrow \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = 0, \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \text{const} ,$$

що і означає лінійну залежність згідно означення 13.

Теорема 4. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ мають похідні першого порядку і визначник Вронського для них не дорівнює тотожно нулю, то ці функції будуть лінійно незалежними.

1.8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами.

Л. Ейлер розробив загальний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо цей метод для однорідного рівняння другого порядку, яке завжди можна подати у вигляді (1.27)

$$y'' + py' + qy = 0 \text{, де } p, q \in R.$$

Має місце **твердження**: лінійна комбінація частинних розв'язків $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння (функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$) також є частинним розв'язком цього рівняння при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2.

Достовірність такого твердження встановлюється безпосередньою його перевіркою підставляючи лінійну комбінацію в однорідне рівняння.

Означення 15. Два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння називають *базисом або фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння.

Сформулюємо теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння.

Теорема 5. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (1.27) є лінійною комбінацією розв'язків фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$:

$$\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{1.29}$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

При розв'язанні задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1,$$

дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_{1.} \end{cases} \tag{1.30}$$

.

з визначником $W(x_0) \neq 0$. Отже, лінійна система рівнянь (1.30) та відповідна задача Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку завжди мають розв'язки.

Як бачимо, проблема знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння зводиться до знаходження частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x)$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння.

За Л.Ейлером, частинні розв'язки шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, де k - деяке число (дійсне або комплексне). Маємо:

$$y = e^{kx},\quad y' = ke^{kx},\quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Підставляємо ці значення в рівняння (1.27) і отримуємо:

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0\ . \qquad (1.31)$$

Враховуючи, що $e^{kx} \neq 0,$ із (1.31) отримуємо рівняння для відшукання сталої величини k

$$k^2 + pk + q = 0\ . \qquad (1.32)$$

Рівняння (1.32) називається *характеристичним*, а його корені називаються *характеристичними показниками*.

Розглянемо три можливих варіанти розв'язків квадратного рівняння (1.32):

1) Дискримінант D>0, k_1, k_2 - дійсні і різні корені.

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x}, \\ y_2 = e^{k_2 x}. \end{cases}$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння (1.27) за схемою: $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, отримуємо

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, C_1, C_2 \in R\ .$$

2) D=0, $k_1 = k_2 = k$ - корені дійсні і рівні (k - двократний корінь).

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{kx}, \\ y_2 = xe^{kx}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок (1.27):

$$\bar{y} = C_1 e^{k\ x} + C_2 x e^{kx}, C_1, C_2 \in R .$$

Легко перевірити, що в цих умовах функція $y_2 = y_2(x)$ є розв'язком однорідного рівняння, а функції $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ є лінійно незалежними (наприклад, за означенням 13.).

3) D<0, корені - комплексно-спряжені числа ($\alpha \pm \beta i$).

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{\alpha\ x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x;\ C_1, C_2 \in R .$$

Приклад 15. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Розв'язання.

Це однорідне диференціальне рівняння ІІ порядку із сталими коефіцієнтами. Записуємо характеристичне рівняння, яке відповідає даному однорідному рівнянню:

$$k^2 \ - 2k - 3 = 0 \ .$$

Розв'язуємо квадратне рівняння і знаходимо корені $k_1 = -1, k_2 = 3$, - корені дійсні і різні.

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}, \\ y_2 = e^{3x}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in R.$$

Приклад 16. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' = 0.$$

Записуємо характеристичне рівняння, яке відповідає даному однорідному рівнянню.

$$k^2 - 2k = 0.$$

Маємо далі:

$$k(k-2) = 0$$

$$k_1 = 0, (k-2) = 0, k_2 = 2.$$

Розв'язки характеристичного рівняння дійсні і різні.

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{0x} = 1, \\ y_2 = e^{2x}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок:

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}, C_1, C_2 \in R.$$

Приклад 17. Розв'язати рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Записуємо характеристичне рівняння, яке відповідає даному однорідному рівнянню:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(k-2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$k_1 = k_2 = 2,-$ двократний корінь характеристичного рівняння.

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = xe^{2x}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок:

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, C_1, C_2 \in R.$$

Приклад 18. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Записуємо характеристичне рівняння, яке відповідає даному однорідному рівнянню

$$k^2 - 2k + 2 = 0 .$$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$, - корені комплексно-спряжені.

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i;$$

$$\alpha = 1, \beta = 1.$$

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^x \cos x, \\ y_2 = e^x \sin x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}; C_1, C_2 \in R .$$

Приклад 18. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

який задовільняє умовам: $y = 1, y' = -1$ при $x = 0.$

Знаходимо спочатку загальний розв'язок однорідного рівняння другого порядку.

Записуємо характеристичне рівняння, яке відповідає даному однорідному рівнянню

$$k^2 + 3k + 2 = 0 .$$

За теоремою Вієта знаходимо корені $k_1 = -1, k_2 = -2.$

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}, \\ y_2 = e^{-2x}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, C_1, C_2 \in R .$$

Знаходимо похідну від $\bar{y}: \bar{y}' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$ і підставляємо початкові умови $y = 1, y' = -1$ при $x = 0$.

Отримаємо систему

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1, \\ -C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = -1. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 - 2C_2 = -1. \end{cases}$$

Знаходимо із системи: $C_1 = 1, C_2 = 0$. Підставляємо ці значення констант в загальний розв'язок і отримуємо шуканий частинний розв'язок

$$y^* = 1 \cdot e^{-x} + 0 \cdot e^{-2x} = e^{-x}.$$

1.9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (1.26)

$$y'' + py' + qy = f(x) \ .$$

Має місце теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Теорема 6. Загальний розв'язок «*y*» лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = \bar{y} + y^*, \qquad (1.33)$$

де $\bar{y}(x)$ - загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння, а $y^*(x)$- будь-який частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Виходячи з теореми 6., бачимо необхідність у знаходженні частинного розв'язку y^*неоднорідного рівняння. Якщо права частина рівняння $f(x)$ має спеціальний вигляд, то існує методика підбору y^* в залежності від вигляду $f(x)$ за методом *невизначених коефіцієнтів.* Розглянемо окремі варіанти стандартного вигляду правої частини неоднорідного рівняння.

1) Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \qquad (1.34)$$

де $P_n(x)$ - многочлен n-го степеня, α - деяке число.

а) Якщо число α не є коренем характеристичного рівняння (1.32), то частинний розв'язок y^* шукають у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x), \qquad (1.35)$$

де $Q_n(x)$ - многочлен n-го степеня із невизначеними коефіцієнтами, які потрібно в подальшому знайти. Для знаходження цих коефіцієнтів підставляють y^* із (1.35) в рівняння (1.26) і з отриманої тотожності многочленів набирають необхідну кількість рівнянь. Користуються правилами:

- два многочлени тотожні тільки тоді, коли вони однакового степеня і при цьому співпадають коефіцієнти при однакових степенях змінної величини;

- значення тотожних многочленів співпадають при однакових значеннях змінної величини.

б) Якщо число α є коренем характеристичного рівняння (1.32) , то частинний розв'язок шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x), \qquad (1.36)$$

де r – кратність кореня α (r=0, r=1 або r=2 для квадратних рівнянь).

2) Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (1.37)$$

де $P_n(x), Q_m(x)$ - задані многочлени відповідно n-го, m-го степенів.

а) Якщо число $(\alpha + \beta i)$ не є коренем характеристичного рівняння (1.32), то y^* шукають у вигляді

$$y^* = e^{\alpha x}(S_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x), \qquad (1.38)$$

де $S_l(x), T_l(x)$ - многочлени l-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, $l = max\{n,m\}$.

б) Якщо число $(\alpha + \beta i)$ є коренем характеристичного рівняння (1.32) кратності r, то y^* шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(S_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x), \qquad (1.39)$$

де $S_l(x), T_l(x)$ - многочлени l-го степеня, $l = max\{n,m\}$; для рівняння другого порядку r=1.

Невизначені коефіцієнти многочленів знаходять із системи рівнянь, яку отримують із відповідних тотожностей при підстановці y^* в неоднорідне рівняння (1.26).

У загальному випадку для розв'язання лінійного неоднорідного рівняння (1.26) використовують метод варіації довільних сталих [ ].

Приклад 19. Розв'язати рівняння

$$y'' - 4y = x^2 e^x.$$

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 4y = 0.$$

$k^2 - 4 = 0$,- характеристичне рівняння;

$$k^2 = 4, k_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2;$$

$$k_1 = 2, k_2 = -2.$$

Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = e^{-2x}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок:

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, C_1, C_2 \in R.$$

Знайдемо далі частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння. Права частина $f(x)=e^x x^2$, порівнюємо із стандартним виглядом (1.34): $\alpha=1$, $P_2(x)=x^2$. Враховуємо, що $\alpha=1$ – не є коренем характеристичного рівняння. Знаходимо частинний розв'язок у вигляді (1.36):

$$y^* = e^x Q_2(x) = e^x(Ax^2+Bx+C).$$

Знаходимо $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ і підставляємо в неоднорідне рівняння:

$$y^{*\prime} = e^x(Ax^2+Bx+C)+e^x(2Ax+B),$$

$$y^{*\prime\prime} = e^x(Ax^2+Bx+C)+2e^x(2Ax+B)+2Ae^x;$$

$$e^x(Ax^2+Bx+C)+2e^x(2Ax+B)+2Ae^x-4e^x(Ax^2+Bx+C)\equiv x^2e^x.$$

Спрощуємо тотожність і прирівнюємо коефіцієнти зліва і справа при однакових степенях змінної x:

$$(Ax^2+Bx+C)+2(2Ax+B)+2A-4(Ax^2+Bx+C)\equiv x^2$$

$$x^2: -3A=1, \Rightarrow A=-\frac{1}{3},$$

$$x: 4A-3B=0, \Rightarrow B=-\frac{4}{9},$$

$$x^0: 2B-3C=0. \Rightarrow C=-\frac{8}{27}.$$

Отримуємо частинний розв'язок

$$y^* = -e^x\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}\right).$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння записуємо за відомою схемою:

$$y=\bar{y}+y^*$$

Отже, шуканий загальний розв'язок даного рівняння:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-e^x\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}\right),\ C_1, C_2\in R.$$

1.10. Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння.

1. $5y'' + 8y' + 4y = 0$;
2. $y'' - 2y' - 3y = 0$;
3. $y'' - 4y' = 0$;
4. $4y'' - 3y' - y = 0$;
5. $y'' - 2y' = 0$;
6. $y'' + 5y' + 6y = 0$;
7. $y'' - 4y' + 5y = 0$;
8. $y'' - 2y' + y = 0$;
9. $y'' + y' - 2y = 0$;
10. $y'' + 4y = 0$;
11. $y'' + 8y' + 16y = xe^{-x}$;
12. $y'' + 2y' + 5y = x + 1$;
13. $y'' - 4y = 8x$;
14. $y'' - 16y = e^{2x}$;
15. $y'' - 2y' = x$;
16. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$;
17. $y'' - 4y' + 5y = x$;
18. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$;
19. $y'' + y' - 2y = 6x^2$;
20. $y'' + 4y = 2x + 1$.

Розділ 2. Ряди

Тема 4. Числові ряди

2.1. Основні поняття та означення. Необхідна умова збіжності ряду.

Означення 1. Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ — задана послідовність чисел. Нескінченна сума виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2.1)$$

називається *числовим рядом*, а самі числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ - членами ряду; n-ий член ряду u_n - називається *загальним членом ряду*.

Сума скінченного числа n перших членів ряду називається n-ю *частинною* сумою ряду і позначається S_n: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Побудуємо частинні суми ряду:

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1; \\ &S_2 = u_1 + u_2; \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \\ &\ldots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n; \\ &\ldots \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Частинні суми ряду (2.2) утворюють числову послідовність: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$. Одним із основних питань в темі «Числові ряди» є питання про збіжність цієї послідовності частинних сум ряду.

Означення 2. Числовий ряд називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S. \qquad (2.3)$$

Величина S називається сумою ряду, а число

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}\ ,- \qquad (2.4)$$

n-м залишком ряду.

Якщо границя S_n не існує (або нескінченна), то числовий ряд називається розбіжним.

Для переважної більшості рядів обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ неможливо, тому далі будуть описані такі методи й ознаки, за допомогою яких можна встановити збіжність ряду, не обчислюючи $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ і не знаходячи самої суми ряду.

Введемо поняття «необхідної», «достатньої» та «необхідної і достатньої» умови (далі «У») для даного твердження (далі «Т»).

Отже, нехай «Т» - деяке твердження, а «У» - умова, пов'язана з цим твердженням, « $\Rightarrow$ »- логічний наслідок.

Якщо із твердження «Т» випливає умова «У» («Т» $\Rightarrow$ «У»), то ця умова для даного твердження є необхідною. Твердження, які містять необхідну умову мають вигляд: « Якщо «Т», то «У»».

Якщо із умови «У» випливає твердження «Т» («У» $\Rightarrow$ «Т»), то ця умова для даного твердження є достатньою. Твердження, що містять достатню умову мають вигляд: «Якщо «У»,то «Т»».

Якщо ж одночасно із твердження «Т» $\Rightarrow$«У» та із «У» $\Rightarrow$«Т», тобто має місце двостороння імплікація «Т» $\Leftrightarrow$ «У», то ця умова для даного твердження є необхідною і достатньою. Твердження, які містять необхідні та достатні (одночасно) умови, містять слова «тоді і тільки тоді», «необхідно і достатньо» і т.п.

Теорема 1. (необхідна умова збіжності ряду):

Якщо числовий ряд збіжний, то границя його загального члена прямує до 0, тобто виконується умова

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбіжний.

Потрібно пам'ятати, що одне тільки виконання умови $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ в досліджуваному ряді не забезпечує його збіжності. Прикладом такого ряду є *простий гармонічний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

який є *розбіжним*, хоча в ньому виконується необхідна умова збіжності

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Основні властивості збіжних рядів формулюють наступні теореми:

Теорема 2. Якщо ряд збіжний, то його залишок також збіжний і навпаки: із збіжності залишку випливає збіжність ряду.

Наслідок. На збіжність ряду не впливає «поведінка» будь-якої кількості його перших членів.

Теорема 3. Якщо члени збіжного ряду почленно помножити на сталий множник *k*, то його збіжність не порушиться, а сума також помножиться на число *k*:

$$ku_1 + ku_2 + \ldots + ku_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} k\cdot u_n = k\cdot S.$$

Теорема 4. Збіжні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$ можна почленно додавати або віднімати. При цьому, ряди

$$(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\ldots+(u_n \pm v_n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$$

будуть також збіжні, а їх сума відповідно дорівнюватиме ($S_1 \pm S_2$) .

У процесі дослідження рядів часто використовують ряд геометричної прогресії. Це ряд вигляду

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0 \qquad (2.5)$$

із загальним членом $u_n = aq^{n-1}$, де q - знаменник прогресії.

Якщо знаменник прогресії $|q|<1$, то ряд (2.5) збіжний і його сума $S=\dfrac{a}{1-q}$.

Ряд геометричної прогресії є розбіжним при $|q| \geq 1$. У цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності ряду, бо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} aq^{n-1} \neq 0, при\ |q| \geq 1$.

Розглянемо приклади дослідження числових рядів.

Приклад 1. Знайти загальний член ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots.$$

та дослідити ряд на збіжність.

Загальний член ряду знаходять методом підбору варіантів, виходячи із вигляду заданих перших членів ряду. Кожну гіпотезу перевіряють.

У даному прикладі чисельник кожного члена дорівнює одиниці, а знаменник є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Візьмемо $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Тоді, беручи n послідовно рівним 1, 2, 3, ..., дістаємо члени ряду:

$u_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, $u_2 = \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$; $u_3 = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$, що і підтверджує правильність формули загального члена ряду $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів загальний член ряду u_n можна розкласти на такі дроби:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{A_1}{n(n+1)} + \dfrac{A_2}{(n+1)(n+2)}, \\ A_1 = \dfrac{1}{2}, A_2 = -\dfrac{1}{2}; \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Частинна сума ряду S_n запишеться тоді так:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

Отже, ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{1}{4}$.

У цьому прикладі збіжність ряду було встановлено безпосередньо за означенням, тобто обчислено $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{4n+1}$.

Загальний член ряду $u_n = \dfrac{3n-2}{4n+1}$. Перевіримо виконання необхідної умови збіжності. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{3}{4} \neq 0 .$$

Необхідна умова збіжності ряду не виконується, отже ряд є розбіжним.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} .$$

Загальний член ряду запишемо у вигляді:

$$u_n = \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

Отже, даний ряд можна подати у вигляді суми двох рядів геометричної прогресії

$$\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} ,$$

кожен з яких є збіжним, бо їх знаменники прогресії менші за одиницю.

Отже, за теоремою 4, ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ збіжний і його

сума S дорівнює: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{0,5}{1-0,5} + \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

2.2. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.

Розглянемо числовий ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty} = u_n$ з додатними членами: $u_1 > 0$, $u_2 > 0, \ldots,$ $u_n > 0, \ldots$ Частинні суми ряду (2.2) утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$.

Теорема 5. Для того щоб ряд з додатними членами був збіжним, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами був розбіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Сформулюємо достатні ознаки збіжності для числових рядів з додатними членами.

Перша ознака порівняння. Якщо для рядів з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,, \qquad (2.6)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2.7)$$

виконується умова $v_n \ge u_n$ (можливо, починаючи з деякого номера n_0), то:

а) із збіжності ряду з більшими доданками (2.7) випливає збіжність ряду з меншими доданками (2.6);

б) із розбіжності ряду з меншими доданками (2.6) випливає розбіжність ряду з більшими доданками (2.7).

Друга ознака порівняння. Якщо для рядів з додатними членами (2.6), (2.7) існує скінченна границя відношення: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k$, $(0<k<+\infty)$, то ряди (2.6) і (2.7) одночасно збіжні або одночасно розбіжні.

При застосуванні ознак порівняння потрібно мати «набір відомих рядів», з якими можна порівнювати досліджуваний ряд. Окрім гармонічного ряду та рядів геометричної прогресії використовують *узагальнений гармонічний ряд* (ряд Діріхлє):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{p\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots,$$

котрий при $\alpha>1$ збіжний, а при $\alpha\le 1$ розбіжний.

Ознака Даламбера. Якщо для числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами існує границя відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

то:

при $l<1$ ряд збіжний;
при $l>1$ ряд розбіжний;
при $l=1$ ознака не працює.

Останній варіант означає, що при $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим і потребує іншого способу дослідження.

Ознака Коші *(радикальна)*. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами ($u_n>0$) існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,

то:

при $l<1$ ряд збіжний;
при $l>1$ ряд розбіжний;

при $l=1$ ознака не працює.

Розглянемо приклади дослідження рядів за достатніми ознаками збіжності.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n!}>0$. Мають місце нерівності:

$$\left(n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\geq 1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n-1}=2^{n-1}\right)\Rightarrow\left(u_n=\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}=v_n\right).$$

Порівнюємо початковий ряд з рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$, який є збіжним, бо його знаменник $q=0{,}5<1$. Доданки збіжного ряду геометричної прогресії є більші, ніж відповідні доданки початкового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. За I ознакою порівняння отримуємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ - є збіжним.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$.

Загальний член ряду $u_n=\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$ являє собою алгебраїчний вираз. Досліджуємо ряд за другою ознакою порівняння. Для того щоб вибрати ряд порівняння, потрібно знайти величину, еквівалентну u_n при $n\to\infty$.

$$u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}} \sim \sqrt{\frac{n}{n^3}} = \frac{1}{n} = v_n\ .$$

Вибираємо для порівняння гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним.

Знаходимо границю відношення:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{10}{n^2}+\frac{20}{n^3}}} = 1 \quad (0<1<+\infty).$$

За другою ознакою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$$ є розбіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Досліджуємо за ознакою Даламбера.

Запишемо загальний член ряду $u_n = \frac{2^n}{n!}$ і побудуємо u_{n+1}. Для цього у формулі для u_n скрізь замість *n* напишемо (*n*+1) і виконаємо аналогічні дії. Отримаємо $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} =$

$$\frac{2\cdot 2^n}{n!(n+1)}.$$

Знаходимо границю відношення:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Отже, згідно ознаки Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ - збіжний.

Приклад 7. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера.

Знаходимо: $u_n=\frac{n^3}{2^n}>0$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, за ознакою Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ збіжний.

Зауважимо, що ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду – алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

Загальний член ряду $u_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}>0$.

Досліджуємо за радикальною ознакою Коші.

Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^2=\frac{1}{9}<1.$$

За ознакою Коші ряд збіжний.

Радикальна ознака Коші результативна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз, зокрема, коли зручно добувати корінь *n*-го степеня і шукати відповідну границю.

2.3. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.

Означення 3. Числовий ряд з доданками різних знаків називається *знакозмінним.*

Знакозмінний ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \in R$.

Очевидно, такий ряд містить нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів.

Теорема *Коші.* Якщо ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду є збіжним, то і знакозмінний ряд також збіжний, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| - \textit{збіжний} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \textit{збіжний}.$$

Означення 4. Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду є збіжним.

Означення 5. Знакозмінний ряд називається *умовно збіжним*, якщо сам знакозмінний ряд збіжний, а ряд із абсолютних величин його членів є розбіжним.

При дослідженні на збіжність знакозмінних рядів необхідно виявити природу збіжності, тобто дослідити на абсолютну та умовну збіжність.

Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца.

Окремим випадком знакозмінного ряду є ряд, в якому знаки доданків строго чергуються.

Означення 6. Знакозмінний числовий ряд, в якому знаки доданків строго чергуються, називається знакопочерговим числовим рядом. Цей ряд має вигляд:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n . \quad (2.9)$$

Загальний член ряду (2.9) $u_n = (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$.

Теорема *Лейбніца.* Якщо члени знакопочергового ряду спадають за абсолютною величиною і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збіжний.

Наслідок 1. Знак суми збіжного знакопочергового ряду співпадає із знаком першого члена ряду.

Наслідок 2. Якщо знакопочерговий ряд збіжний, то його сума за абсолютною величиною не перевищує модуля першого члена ряду, тобто $|S| < |a_1|$.

Наслідок 3. Якщо при обчисленні суми збіжного знакопочергового ряду обмежитись тільки першими n членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить модуля першого із відкинутих членів, тобто $|r_n| < |a_{n+1}|$.

Наслідок 4. Якщо для ряду не виконується умова теореми Лейбніца $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний (не виконується необхідна умова збіжності).

Основна відмінність між абсолютною та умовною збіжностями полягає в наступному: абсолютно збіжні ряди «стійкі» до переставляння місцями їх доданків. Їх збіжність та сума від цього не змінюються.

Натомість, переставляння доданків в умовно збіжному ряді не тільки змінює його суму, але може і ряд зробити розбіжним.

Розглянемо приклади дослідження знакозмінних рядів.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Загальний член ряду $u_n=\frac{\sin n}{n^2}$. Залежно від n члени ряду можуть бути як додатними, так і від'ємними. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ - знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$. Цей ряд буде знакододатним $|u_n|=\frac{|\sin n|}{n^2}>0$, отже, для дослідження на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємось ознакою порівняння рядів: $|u_n|=\frac{|\sin n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}=v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — ряд порівняння. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є узагальненим гармонічним рядом, $\alpha=2>1$, збіжним за властивостями. Отже, за першою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ також збіжний. Згідно означення, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ є абсолютно збіжним.

Приклад 10. Дослідити на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ почергово змінює знак, отже, це – знакопочерговий ряд. Перевіримо умови теореми Лейбніца для цього ряду:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Як бачимо, ці умови виконуються, отже знакопочерговий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ є збіжним. Ряд з абсолютних величин цього ряду - простий гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним. Отже, даний знакопочерговий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ є умовно збіжним.

Приклад 11. Скільки членів збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5^n}$ треба залишити, щоб обчислити його суму з точністю до 0,001?

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5^n}$ — знакопочерговий і збіжний. Скористаємось наслідком 3. Почергово обчислимо за абсолютною величиною члени ряду, поки не знайдемо такий доданок, який буде за модулем меншим за 0,001: $|u_1| = \frac{1}{5}$;

$|u_2| = \frac{2}{25}$; $|u_3| = \frac{3}{125}$; $|u_4| = \frac{4}{625}$; $|u_5| = \frac{1}{625} > 0{,}001$;

$\left| u_6 \right| = \dfrac{6}{625 \cdot 25} < 0{,}001$. Останній (6-й) доданок можна відкинути, отже, достатньо залишити п'ять членів ряду.

2.4. Завдання для самостійної роботи.

I. Дослідити збіжність числового ряду за необхідною умовою збіжності.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n-2}{5n+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n^2-3}{7n^2+4}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{2n+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+2n-1}{3n^2+4}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(3n+1)^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3+1}{3n^3+5}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n-4}{2n+3}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n+5}{5n-3}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3+5}{5n^3+2}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^2}{n^2}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{2n-1}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2-1}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2}{(4n-1)^2}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{3n-2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+3}{3n-2}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2-1}{5n^2+4}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-1}{4n^2+1}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n^2-1}{3n^2+2}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$.

II. Дослідити збіжність числового ряду за ознакою Даламбера.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n+1)!}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{2^{n+1}}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n-1}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{10^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n-1)!}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+1)}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{\sqrt{n}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ \ +4}{2^n}$.

III. Дослідити числовий ряд на збіжність за радикальною ознакою Коші.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+2)^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n-1)^n}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(10n-3)^n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(n+2)^n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(5n+1)^n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+1)^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+4}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}n$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^n}$.

Тема 5. Степеневі ряди та їх застосування

2.5. Основні поняття, означення.

Означення **7.** Ряд вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (2.10)$$

де членами ряду є функції від аргументу x, називається *функціональним рядом*. При $x=x_0$ ряд (2.10) перетворюється на числовий, взагалі кажучи, знакозмінний ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \qquad (2.11)$$

Якщо ряд (2.11) збіжний (розбіжний), то кажуть, що при $x=x_0$ є збіжним (розбіжним) функціональний ряд (2.10).

Означення 8. Усі значення аргументу x, при яких функціональний ряд збіжний, називають *областю збіжності функціонального ряду*.

В області збіжності існує границя частинних сум функціонального ряду

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x),$$

де функція $S(x)$ — сума ряду.

Ряд $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$ називається n –м *залишком ряду*.

В області збіжності функціонального ряду виконується формула $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, де $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

У загальному випадку, при дослідженні на збіжність функціонального ряду використовується та сама методика, що і для знакозмінного ряду.

Приклад 12. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}=\frac{\sqrt{1}}{x-2}+\frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2}+\frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}+\ldots$$

Вважаємо x фіксованим.

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$. Цей ряд буде знакододатний і формально числовим рядом. Отже, можна застосовувати до нього ознаку Даламбера:

$$|u_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^2};\ |u_{n+1}(x)|=\frac{\sqrt{n}+1}{|x-2|^{n+1}};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера ряд буде збіжним, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1\Leftrightarrow|x-2|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2>1\\ x-2<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<1\end{array}\right.,$$

і розбіжним, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}>1\Leftrightarrow|x-2|<1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2<1\\ x-2>-1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність в крайніх точках $x = 1$ і $x = 3$. При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x = 3$ — ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбіжні, тому що в них не виконується необхідна умова збіжності. Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$: $x\in(-\infty;\,1)\cup(3;\,+\infty)$. У цій області ряд є абсолютно збіжним.

Означення 9. Функціональний ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2.12)$$

називається *степеневим рядом* за степенями змінної *x*. Загальний член степеневого ряду $u_n(x) = a_n x^n$; числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називають *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду по степенях $(x - x_0)$:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (2.13)$$

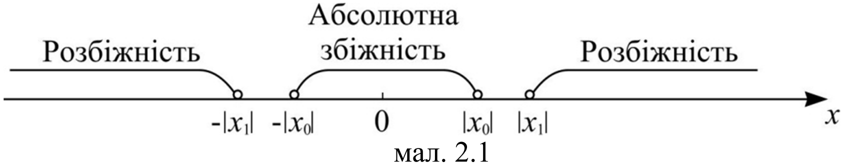
Якщо в (2.13) замінити $x - x_0 = X$, то дістанемо ряд, аналогічний (2.12), за степенями *X*.

Дослідимо властивості ряду (2.12).

2.6. Теорема Абеля. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду.

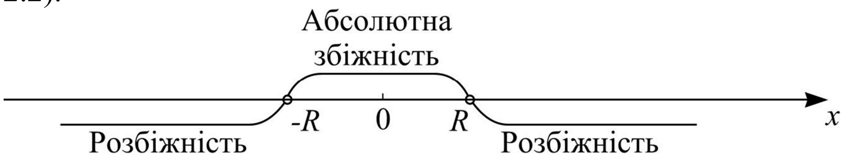
Теорема *Абеля.* Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = x_0$, то він абсолютно збіжний для будь-якого *x*, що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$; якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ряд розбіжний при $x = x_1$, то він розбіжний при всіх *x*, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Ілюстрацію до теореми Абеля наведено на мал. 2.1.



мал. 2.1

Як наслідок із теореми Абеля для степеневого ряду (2.12) існує інтервал збіжності з центром у точці $x = 0$ (мал. 2.2).



мал.2.2

Означення 10. *Інтервалом збіжності степеневого ряду* називають такий інтервал (-R; R), у всіх внутрішніх точках якого ряд є абсолютно збіжним, а для всіх точок $|x| > R$ ряд є розбіжним; число $R > 0$ називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Для узагальненого степеневого ряду (2.13) інтервал збіжності $\left(x_0 - R;\ x_0 + R\right)$ має центр симетрії в точці $x = x_0$.

Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = R$, $x = -R$ ряд може як збіжним, так і розбіжним. Це питання потребує спеціального дослідження в кожному випадку.

Виведемо формулу для знаходження радіуса збіжності ряду (2.12). Для цього побудуємо ряд із абсолютних величин членів ряду (2.12):

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |a_n| \cdot |x|^n + \ldots \qquad (2.14)$$

Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. Тоді, застосовуючи ознаку Даламбера до ряду (2.14), дістаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot l.$$

При $|x| \cdot l < 1$ ряд (2.14) збіжний, а отже, ряд (2.12) абсолютно збіжний; при $|x|\cdot l > 1$ ряд (2.12) є розбіжним. Розбіжність ряду, встановлена за ознакою Даламбера, означає, що для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)| \neq 0$, а тому не виконується необхідна умова збіжності і для ряду (2.12) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \neq 0$, і ряд (2.12) при $|x|\cdot l > 1$ буде також розбіжним. Отже, нерівність $|x|\cdot l < 1$ визначає інтервал збіжності ряду (2.12): $|x|\cdot l < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l} \Leftrightarrow -\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l}$. Радіус збіжності визначається за формулою

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{2.15}$$

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна дістати формулу для радіуса збіжності, степеневого ряду у вигляді:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2.16}$$

Зауваження. Формулами (2.15) і (2.16) можна користуватися лише в тих випадках, коли ці границі існують. У загальному випадку дослідження збіжності степеневого ряду виконується за такою самою методикою, що і для довільного функціонального ряду, при цьому:

1) вважають x фіксованим;
2) розглядають ряд з абсолютних величин даного степеневого ряду;
3) використовують достатні ознаки збіжності для числових рядів з додатними членами.

Приклад 13. Знайти інтервал і радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n+7^n}$.

У цьому степеневому ряді $a_n=\frac{2^n}{3^n+7^n}$. За формулою радіуса збіжності (2.15) маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+7^{n+1}\right)}{2^{n+1}\left(3^n+7^n\right)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{2}.$$

Інтервал збіжності даного степеневого ряду: $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{2}\right)$.

Приклад 14. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{x^3}{1\cdot 2}+\frac{x^6}{2\cdot 4}+\frac{x^9}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Запишемо загальний член ряду $u_n(x)=\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$. Цей ряд містить не всі степені x, тому скористатися формулами для радіуса збіжності (2.15) чи (2.16) в даному випадку неможливо. Дослідимо ряд за загальною методикою дослідження функціональних рядів.

Вважаємо x фіксованим.

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $|u_n(x)|=\left|\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}\right|=\frac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}$, до якого застосуємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n|x|^{3(n+1)}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}|x|^{3n}}=\frac{|x|^3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|^3}{2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (на цьому інтервалі ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$ буде абсолютно збіжним):

$$\frac{|x|^3}{2}<1 \Leftrightarrow |x|^3<2 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{2}.$$

Радіус збіжності буде: $R=\sqrt[3]{2}$.

Проведемо дослідження збіжності ряду на кінцях інтервалу збіжності:

При $x=-\sqrt[3]{2}$ $u_n\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{(-1)^n}{n}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Отримали ряд Лейбніца, який умовно збіжний.

При $x=\sqrt[3]{2}$, $u_n\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{n}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Це гармонічний ряд, який, як відомо, розбіжний. Таким чином, область збіжності степеневого ряду: $x\in[-\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{2})$.

Приклад 15. Дослідити збіжність ряду:

$$(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{3^2}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{n^2}+\ldots$$

Робимо заміну змінної $x-2=y$ і отримуємо ряд

$$y+\frac{y^2}{2^2}+\frac{y^3}{3^2}+\ldots+\frac{y^n}{n^2}+\ldots$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду, беручи до уваги, що $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$, тоді $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу (–1; 1).

1) Якщо $y = 1$, дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Це узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 2 > 1$. Він збіжний.

2) Якщо $y = -1$, дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який є абсолютно збіжним. Тоді область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} y^n$ така: $-1 \le y \le 1$.

Замінюючи змінну *y* на змінну *x*, дістаємо шукану область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \cdot (x-2)^n : -1 \le x - 2 \le 1$, звідки $1 \le x \le 3$.

Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.

Степеневий ряд $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ на будь-якому відрізку із його інтервалу збіжності $(-R;\, R)$ можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому мають місце рівності:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots;$$

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Отже, згідно з цими властивостями, отримані ряди з похідних чи інтегралів мають такий самий інтервал збіжності, як і початковий степеневий ряд.

2.7. Ряди Тейлора і Маклорена. Розклад в степеневий ряд елементарних функцій.

Ряд Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки $x = x_0$ має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots \quad (2.17)$$

При $x_0 = 0$ отримуємо ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (2.18)$$

Теорема 6. (достатня умова розкладу функції *f(x)* в ряд Маклорена). Якщо на проміжку $[-R;\ R]$ похідні будь-якого порядку для функції *f(x)* обмежені одним і тим самим числом $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$, то на інтервалі $(-R;\ R)$ функція *f(x)* може бути розкладена в ряд Маклорена. Іншими словами, при цих умовах ряд Маклорена для *f(x)* у кожній точці із $x \in (-R;\ R)$ є абсолютно збіжним.

Зауваження. Залишок ряду Маклорена $r_n(x)$ можна замінити одним залишковим членом $\bar{r}_n(x)$, який у формі Лагранжа має вигляд:

$$\bar{r}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), -R < \xi < R. \quad (2.19)$$

Тоді ряд Маклорена (2.18) набирає вигляду формули Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \bar{r}_n(x). \quad (2.20)$$

Теорема 7. Для того щоб функцію $f(x)$ можна було розкласти в ряд Маклорена на інтервалі $x \in (-R;\ R)$, необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{r}_n(x) = 0$.

Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій:

1) $y = e^x$

$$e^x = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots ,$$

область збіжності $(-\infty; +\infty)$.

2) $y = \sin x$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots ,$$

область збіжності $(-\infty; +\infty)$.

3) $y = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots ,$$

область збіжності $(-\infty; +\infty)$.

4) $y = (1+x)^m$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + \ldots ,$$

інтервал збіжності $(-1;1)$.

5) $y = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots ,$$

область збіжності $(-1; 1)$.

6) $y = arctgx$

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots ,$$

область збіжності $[-1; 1]$.

Використовуючи ці формули, можна у ряді випадків записати розклади функцій в ряд Маклорена без обчислення коефіцієнтів цього ряду (без обчислення похідних функцій).

Приклад 16. Розкласти в ряд за степенями x функцію $f(x) = 2^x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 2^x, & f(0) = 2^0 = 1, \\
f'(x) = 2^x \ln 2, & f'(0) = \ln 2, \\
f''(x) = 2^x (\ln 2)^2, & f''(0) = (\ln 2)^2, \\
\ldots & \ldots \\
f^{(n)}(x) = 2^x (\ln 2)^n, & f^{(n)}(0) = \ln^n 2, \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то для будь-якого фіксованого x маємо $\left| f^{(n)}(x) \right| = 2^x \ln^n 2 < 2^x$, тобто достатня умова розкладу функції $f(x) = 2^x$ у ряд Маклорена виконується.

Отримуємо ряд Маклорена

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \ldots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + \ldots$$

Цей ряд є абсолютно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 17. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sin^2 x$ і знайти область збіжності ряду.

Перетворимо функцію так: $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Скористаємось формулою розкладу в ряд Маклорена функції $\cos x$, тоді дістанемо:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Знаходимо шуканий розклад в ряд Маклорена:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\ldots=$$

$$=\frac{2}{2!}x-\frac{2^3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Область збіжності новоутвореного ряду для $f(x)=\sin^2 x$ буде така ж, як і для $\cos x$, тобто $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Приклад 18. Розкласти функцію $f(x)=x^3+5x^2-4x+1$ в ряд за степенями $x-2$.

Маємо $f(x)=x^3+5x^2-4x+1,\ f(2)=21;$

$$f'(x)=3x^2+10x-4,\ f''(2)=28;$$
$$f''(x)=6x+10,\ f''(2)=22;$$
$$f'''(x)=6,\ f'''(2)=6;$$
$$f^{(4)}(x)=0,\ f^{(4)}(2)=0.$$

Похідні вище третього порядку дорівнюють нулеві. Ряд Тейлора (2.17) для заданої функції має вигляд

$$f(x)=21+\frac{28}{1!}(x-2)+\frac{22}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3=$$

$$=21+28(x-2)+11(x-2)^2+(x-2)^3.$$

2.8. Застосування рядів для наближених обчислень.

Розклад функцій у степеневі ряди використовується для наближеного обчислення значень функцій, визначених

інтегралів, наближеного розв'язування рівнянь і т. ін. При цьому в ряді Маклорена чи Тейлора для даної функції залишають кілька перших членів, а решту відкидають.
Похибка при наближених обчисленнях являє собою суму відкинутих членів ряду — залишок ряду.

Для оцінки похибки у випадку, якщо ряд знакосталий, залишок ряду порівнюють із рядом нескінченно спадної геометричної прогресії. Якщо ряд знакопочерговий, то за наслідком теореми Лейбніца похибка за абсолютною величиною не перевищує першого із відкинутих членів ряду.

Приклад 19. Обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001.

Зробимо такі перетворення: $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$.

Скористаємось рядом Маклорена (2.18) для функції $(1+x)^m$, узявши $x=\frac{1}{8}$, $m=\frac{1}{3}$. Тоді дістанемо:

$$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots)=2+\frac{1}{12}-\frac{2}{3^2\cdot 64}+\frac{10}{3^4\cdot 512}-\ldots$$

За винятком першого члена дістали знакопочерговий ряд, він буде збіжним, бо $\frac{1}{8}\in(-1;1)$. Похибка r_n за абсолютною величиною буде меншою від першого із відкинутих членів. Послідовно обчислюємо: $|r_1|<\frac{1}{12}$; $|r_2|<\frac{1}{288}$; $|r_3|=\frac{2\cdot 5}{81\cdot 512}<0{,}001$. Отже, щоб обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001, достатньо залишити три перші члени: $\sqrt[3]{9} \approx 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{9 \cdot 64} = 2\frac{23}{288} \approx 2{,}0798 \approx 2{,}080$.

Приклад 20. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.

Оцінимо похибку наближеної рівності

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \text{ при } x > 0. \qquad (2.21)$$

Ця похибка визначиться залишком ряду

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots = \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \ldots\right).$$

Якщо $\left|\frac{x}{n+1}\right| < 1,$ то

$\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \ldots = \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x}{n+1-x}$ за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $a_1 = \frac{x}{n+1}$ і знаменником $q = \frac{x}{n+1}$. Отже, маємо таку оцінку залишку ряду

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}. \qquad (2.22)$$

За формулою (2.21) для обчислення $\sqrt{e}$ маємо:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{\frac{1}{4}}{2!} + \ldots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2.23)$$

Оцінку похибки при обчисленні $\sqrt{e}$ дістанемо, узявши

$x=\dfrac{1}{2}$ в (2.22).

$$r_n<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{n+1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n\cdot n!(2n+1)} \qquad (2.24)$$

Знайдемо таке n, щоб похибка була меншою за 0,01. Для цього в (2.24) послідовно покладемо

$n=1,\ n=2,\ n=3,\ \ldots$:

$$r_1<\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3}=\frac{1}{6};$$

$$r_2=\frac{1}{4\cdot 2!\cdot 5}=\frac{1}{40};\ \ r_3<\frac{1}{2^3\cdot 3!\cdot 7}=\frac{1}{336}<0{,}01.$$

Отже, $n=3$ і для обчислення $\sqrt{e}$ з точністю до 0,01 достатньо залишити в (2.23) тільки такі члени:

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\frac{1}{4}}{2!}+\frac{\frac{1}{8}}{3!}\approx 1+0{,}50+0{,}125+0{,}021\approx 1{,}65.$$

Приклад 21. Обчислити $\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt$ з точністю до 10^{-4}.

Використовуємо розклад функції e^x в ряд Маклорена

$$e^x=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Покладемо $x=-t^2$, дістаємо:

$$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\ldots$$

Цей степеневий ряд має нескінченний радіус збіжності. Почленно інтегруємо отриманий ряд в області збіжності, отримаємо:

$$I=\int_0^1 e^{-t^2}\,dt=$$

$$=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{t^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\ldots$$

Для обчислення I візьмемо перші сім членів ряду, допускаючи похибку, яка за абсолютною величиною менша від модуля восьмого члена, тобто менша за $\frac{1}{75600}<1{,}4\cdot10^{-5}<10^{-4}$. Проводячи обчислення суми перших семи членів, знайдемо, що $I\approx 0{,}7468$.

2.9. Завдання для самостійної роботи.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}x^n$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(3n+1)!}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)}{2^{n+1}}x^n$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(n-1)!}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)!}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{5^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{2n-1}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)x^n}{10^n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n(n+1)}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 x^n}{5^n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{\sqrt{n}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)x^n}{2^n}$.

Список літератури

1. Головатий Ю.Д., Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Диференціальні рівняння. – Львів: ЛНУ, 2011.-470 с.

2. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вид-во Київс. ун-ту, 1962. – 168 с.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу /Под редакцией Демидовича Б.П./. – М.: Наука, 1978.-472 с.

4. Коваленко І.П. Вища математика:навч. посіб. /І.П.Коваленко. – Київ: Слово, 2011. – 456 с.

5. Литвин І.І. Вища математика: навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / І.І.Литвин, О. М. Конончук, Г. О.Желізняк - [2-ге вид.]. – К.:Центр учбової літератури, 2017 – 368 с.

6. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – Київ: Вища школа, 1981.-504с.

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйш. шк., 1974. – 672 с.

8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т 2. – М. : Наука, 1978. – 576 с.

9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1982. – 323 с.

10. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 454 с.

11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 128 с.

12. Шкіль М.І. Вища математика: підручник: кн.2 /М.І.Шкіль, Т.В.Колесник. – Київ: Либідь, 2010. – 496 с.